b) $(f^{-1})'(\frac{5}{3}) = \frac{1}{f'(-\frac{1}{2})} = -\frac{4}{3}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$

$(f^{-1})'(\frac{5}{7}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = -\frac{49}{12}$

**EXERCICE№18**

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1) $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | -2 → | 0 |

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) = ] -2, 0[

2) – a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - x$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} - 1 \leq 0$ car $x^2 + 1 \geq 1$

* g est continue et strictement décroissante sur IR ,

elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR) = IR ;

comme $0 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$

par suite l'équation $f(x) = x$ admet $\alpha$ comme unique solution dans IR

$g(-2).g(-1) < 0$ (à vérifier) d'où : $-2 < \alpha < -1$

b)

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ | + | 0 | - |

3) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in ]-2, 0[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 1 + x$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x+1)^2$ *avec* y et $(x+1)$ de même signe

$\Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 + y(x+1)^2 \Leftrightarrow (-x^2 - 2x)y^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{-x^2 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$

d'où : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}$ pour $x \in ]-2,0[$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn